

Handwritten signature: *[Illegible]*

Б.1 Ду Ду - уравн-ие, содер-ие произв. неизв. функций

$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}$, содержащее произв. по одной из переменных

Дат 024 в числ. пр. - 11 — 22 из. переи.

Др $\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_i(t) = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dot{y}_n(t) = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{array} \right. , f_i - \text{заданн} \left| \Rightarrow \begin{array}{l} \text{норм. сист.} \\ \text{разр. инт} \end{array} \right.$

216 $y^{(n)}(t) = F(t, y, -y^{(n-1)})$ эквив. в смысле рел. изм. сст.

$\begin{cases} \dot{y}_1 = g_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = g_n \\ y_1 = F \end{cases}$
 Если $y(t)$ - реш. н. сист. $\rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ - раз-е ор-бо
 $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ - раз-е крив- (траект-)
 $(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$ - кинем. крив-

Примеры мат. моделей:

а) Движение единичной массы!

$$\frac{dx^L}{dt} = f(t) \Rightarrow x(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + c_1 + c_2 t \Rightarrow \text{необход. гранич. у-е}$$

$$= f(t, x, x') \quad \begin{matrix} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = \sigma_0 \end{matrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{r}, \vec{r}') \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = f_1(t, x, y, z, p, q, u) \\ \frac{dx^2}{dt} = f_2(t, x, y, z, p, q, u) \\ \frac{dx^3}{dt} = f_3(t, x, y, z, p, q, u) \end{cases} \quad (\odot) \quad \begin{cases} x' = p \\ y' = q \\ z' = u \\ p' = f_1 \\ q' = f_2 \\ u' = f_3 \end{cases} \quad - \text{Haupt. gl.}$$

8) Динамика поступлений:

$$\frac{du}{dt} = au - bu, \quad \text{усть-наращивание}$$

похг. ауст.

$$u(t) = C e^{(a-b)t}$$

$$u(0) = u_0$$

$$\frac{du}{dt} = au - bu \cdot v$$

и-перТВн

$$\frac{dv}{dt} = Au \cdot v - cv$$

У-хэлзгүүх

Б.2

Опр Пусть: $M(t,y), N(t,y)$ опр. и $\in C(D) \cap \mathbb{R}^2$ $\left| \Rightarrow M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0 \right.$ - ОДУ в сим. буре. (*)

Опр Пара $\varphi: \begin{matrix} \varphi(t), \varphi(t) \\ t \quad y \end{matrix}$ - реш. ОДУ в сим. буре, если: 1) $\varphi, \psi \in C^1[t_1, t_2]$
2) $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$
3) $(\varphi(t), \psi(t)) \in D \quad \forall t \in [t_1, t_2]$
4) одн. ур-ие в тождество, т.е.
 $M\varphi'(t) + N\psi'(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$

Опр Фун-я - $\Phi(t,y,e) -$ интеграл * $\in D$ $\forall e \in \mathbb{C}_0$. $\Phi = 0 \Rightarrow y$ - реш. *

Опр Обозначим интеграл * $\in D$ $\forall e \in \mathbb{C}_0$ $\Phi(t,y,e) = 0 \Leftrightarrow y$ - реш. *

Опр * - УРП, если $\exists V(t,y) \in C^1(D)$: 1) $\frac{\partial V}{\partial t} = M(t,y)$ 2) $|\frac{\partial V}{\partial y}| + |\frac{\partial V}{\partial t}| > 0, \forall (t,y) \in D$
 $\frac{\partial V}{\partial y} = N(t,y),$
 $\forall (t,y) \in D$

Т.1 $V(t,y) = c$ - общий интеграл УРП в D

* Докажем, что это интеграл: $\exists (t_0, y_0) \in D$ и $V(t_0, y_0) = c_0 \Rightarrow$ мы опр! по Т. об одр. ср.

Т. кепр. груп. Фун-я $y(t)$ в $D_{t_0}(t_0, y_0)$: $V(t, y(t)) = c_0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial y} dy = M dt + N y' dt = 0$
 $\Rightarrow M(t, y) + N(t, y) y' = 0$
уравн. парам. реш.

Общий интегр. ! $\exists$ реш. УРП $\Rightarrow \frac{dV(\varphi, \psi)}{dt} = M\varphi' + N\psi' = 0 \Rightarrow V = c, [t \in [t_1, t_2]]$
 $(\varphi(t), \psi(t))$ $\uparrow$
реш.

Т.2. Пусть:

- 1) D - прямой, с осью параллельными координ.
- 2) $M, N \in C(D)$ с равн. произв. 1 нгр

$$\textcircled{1} * - \text{УРП} \Leftrightarrow \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} \quad \forall (t,y) \in D$$

* $\Rightarrow$ равенство интегр. произв. $V(t,y)$

$$\Leftrightarrow \exists V(t,y) = \int_{t_0}^t M(\tau, y) d\tau + \int_{y_0}^y N(t_0, \xi) d\xi \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = M(t,y), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = N(t_0, y) + \int_{t_0}^t \frac{\partial N(\tau, y)}{\partial t} d\tau = N(t,y)$$

Опр 3. Кемин где ОДУ 1-го пор. разр. ст.и. произв.!

$$c_n) \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y) \in \pi := \{t-t_0| \leq T, \\ y(t_0) = y_0 \\ |y| \leq A \} \\ y(t_0) = ? \end{array} \right.$$

Опр $y(t)$ — реш. 2. Колеб., если
на $[t_0, t_1]$

- 1) $y(t) \in C^1[t_0, t_1]$
- 2) $y(t_0) = y_0$
- 3) y — решение x
- 4) $|y(t) - y_0| < A, t \in T$

7.6 $y(t)$ - пер. $\times$ (ε) $|y(t) - y_0| \leq A, t \in \bar{T}, y(t) \in C(\bar{T}),$ устрем. $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t)) dz$

◀ (2) $\int y' = \int 1$

(*) $f \in C(\Gamma) \Rightarrow y \in C^1(\Gamma)$, $y'(t) = f(t, y(t)) \in \tilde{T}$, $y(t_0) = y_0$.

уа С(П)
интер. с перем.
врем. прот.

Л. Г. Б. Пусть:

$$1) 0 \leq z(t) \leq \bar{c} + d \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b],$$

④ $z(t) \leq ce^{d(t-t_0)}, t \in [a, b]$

④ $\exists t \geq t_0$. $p(t) = \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau$, $p'(t) = z(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$ $\Rightarrow p' \leq c + dp$ $\cdot e^{-d(t-t_0)} \Rightarrow \frac{d}{dt}(p e^{-d(t-t_0)}) \leq c e^{-d(t-t_0)}$

$$\Rightarrow p(t) e^{-b(t-t_0)} - \underbrace{p(t_0)}_0 \leq \frac{c}{-b} (e^{-b(t-t_0)} - 1) \Rightarrow p \leq c(1 + e^{+b(t-t_0)}) \Rightarrow z \leq c + dp \leq e^{+d(t-t_0)}$$

$$\text{If } t < t_0, q(t) = \int_t^{t_0} z(\tau) d\tau, q'(t) = -z(t), t \in [a, b] \Rightarrow -q' \in C + d q \cdot e^{\int_t^{t_0} z(\tau) d\tau} \Rightarrow \frac{d}{dt} (q \cdot e^{\int_t^{t_0} z(\tau) d\tau}) = 0$$

$$\Rightarrow q e^{\frac{d(t-t_0)}{d}} \geq \frac{c}{d} (e^{\frac{d(t-t_0)}{d}} - 1) \Rightarrow q d \leq c (e^{\frac{d(t-t_0)}{d}} - 1) \Rightarrow$$

Def Fncn f is continuous at a if $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

7.1 Пусть!

1) f -непр. и вырожд. ген. л. с к 6 П
по γ

① $y_i(t_1) y_i(t_2)$ - perm. $\Rightarrow y_1 = y_2$, $\forall t \in [t_1, t_2]$

$$\bullet \quad |y_1 - y_2| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))| d\tau \leq L \int_{t_0}^t |y_1 - y_2| d\tau \stackrel{\text{A.B.}}{\Rightarrow} y_1 = y_2 \quad \forall t \in \tilde{T}.$$

5.4

Опр 3. Коши — — — $\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y) \in C(\Pi) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$, $\Pi = \{ t-t_0 \leq T, |y-y_0| \leq A \}$ $y(t) = ?$

Т.1 Пусть:

1) $f \in C(\Pi)$ и ограничен. y_0 л. н. $y \in \Pi$

2) $|f(t, y)| \leq M \quad \forall (t, y) \in \Pi$

① Форм. 3. Коши на $[t_0-h, t_0+h]$, $h = \min\{T, \frac{A}{M}\}$
 $y_k \in C[t_0-h, t_0+h]$, $|y-y_0| \leq A$, $\forall t \in [t_0-h, t_0+h]$
 $(t, y_k(t)) \in \Pi \quad \forall t \in \dots$, $y_0 = y(t_0)$

Если Форм. (2) выполн $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y) d\tau$, $y_{k+1} = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_k) d\tau$, $y_0 = y(t_0)$

$\Rightarrow f$ -непр. $\Rightarrow y_{k+1} \in C[t_0-h, t_0+h]$, $|y_{k+1}-y_0| \leq M \cdot h \leq A$, $|y_{k+1}-y_k| \leq L \cdot A \frac{|t-t_0|^k}{k!}$ - доказано по инд.

$$|y_{k+1}-y_k| \leq \left| \int_{t_0}^t L |y_k-y_{k-1}| d\tau \right| \leq L \cdot A \frac{|t-t_0|^k}{k!} \text{ и т.д. ; } y_k = y_0 + \sum_{n=0}^k (y_{n+1}-y_n) \Rightarrow \text{р.к. } y_k \Leftrightarrow \text{р.к. } \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}-y_n$$

по пр. Дарбуиндера пр. $\sum_k L^k A \frac{|t-t_0|^k}{k!}$ кр. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}-y_n) \xrightarrow{\text{по пр. Дарбуиндера}} y(x) \in C[t_0-h, t_0+h]$

$y_{n+1}, y_n \in C[t_0-h, t_0+h]$, кроме того из (**) $\Rightarrow |y-y_0| \leq A$

$$|f(t, y_k(t)) - f(t, y(t))| \leq L |y_k(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{h}, \quad t \in [t_0-h, t_0+h]$$

$$\Rightarrow \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_k(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{h} |t-t_0| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0-h, t_0+h] \Rightarrow \text{в пр. 6 unser. решение}$$

5.5

Опр Σ 1-ю порядка непрер. отно-но y' : $F(t, y, y') = 0$, F определена в $V, \{ |t-t_0| \leq a, |y-y_0| \leq b, |y'-y'_0| \leq c \}$

Опр 3.Кем. гнр ... : $\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$

- Т1 Пусть:
- 1) $F, \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial y}$ непрер. в V
 - 2) $\frac{\partial F}{\partial p} |_{(t_0, y_0, y'_0)} \neq 0$
 - 3) $F |_{(t_0, y_0, y'_0)} = 0$

⊕ $\exists!$ р-н 3.Кем гнр --- на $[t_0-h, t_0+h]$

Из условия $\exists!$ непрер. гнр. в $B_\varepsilon(t_0, y_0)$ $g(t, y): F(t, y, g) = 0$ в окр-ти. в зависимости $g(t_0, y_0) = y'_0 \Rightarrow$ одно из н.у. выполнено. Задача $\Leftrightarrow \begin{cases} g = y'(t, y) = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, Кроме того $\frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial p}$ - непрер. $\Rightarrow$ рассмотрим $\Pi \in B_\varepsilon(t_0, y_0) \Rightarrow \exists$ кем. $\hat{g} \Rightarrow \exists!$ непрер. гнр. р-н на h

$L = \max_{t \in \Pi} |\frac{\partial g}{\partial y}|$

Опр $y(t)$ - р-н. $\forall$ коз-н α особен, если $\forall t \in [t_1, t_2] \exists$ другое р-н. (сходящееся в сколь угодно окр. t): но произв. $= y'(t)$

Т.е. нарушены ун. 1, 2, 3) Т.1, $\exists y' = \sqrt[3]{y^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} \not\equiv 0$ при $y=0$ $\leftarrow$ особ. р-н.

$\begin{cases} F(t, y, p) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(t, y, p) = 0 \end{cases} \Rightarrow P(t, y) = 0$ - задеет особ. р-н
 - задеет произв. р-н
 - не задеет р-н

Согл-но: $(y')^2 - y^2 = 0$
 $(y')^2 - y^2 = 0$
 $(y')^2 - (t+y)y' + ty = 0$